

设定物业的标价

学习阶段： 3

学习范畴： 数与代数

学习单位： 公式
二元一次方程
探索与研究

目标： (i) 丰富学生在现实情境中应用二元一次方程及其图像的经验
(ii) 提升学生在建模中识别所需参数和作出假设的能力
(iii) 学习在数学建模过程中运用信息技术（IT）

先备知识： (i) 运用代入法求公式中未知数的值
(ii) 理解二元一次方程的概念及其图像

教学资源： 配有 MS Excel 及网络连线的台式机或平板电脑

背景资料：

房地产定价是一个复杂的领域，涉及影响房产价值的各种因素。数学建模提供一个有用的工具，以了解和估算房地产价格，为潜在的买家、卖家和房地产专业人士提供有用的参考。以下建模活动的主要目标是丰富学生对二元一次方程及其图像的理解和实际应用。

基于实证性的模型，这套活动引导学生把数据转化为对物业定价作出明智决定的导航工具。在信息科技的帮助下，学生能够制定模型，而无需因未有进深的数学和统计学知识所限制。随着学生深入研究建模，他们会探索数值估算并讨论模型的参数、假设及局限性。

活动细节：

这资源套件共有三个主要的活动：

- 活动 1：回顾先备知识（1A）和运用 MS Excel 绘制图像和制定模型（1B）。
- 活动 2：运用物业标价的数据和相应的楼面面积来制定模型。
- 活动 3：运用物业标价的数据和它们相应的楼龄来制定模型。

根据 Yong 等人（2015）的数学建模过程框架，下表总结了教师可以在相应问题中与学生讨论的元素。

阶段	元素	工作纸 1A	工作纸 1B	工作纸 2	工作纸 3
定义	定义感兴趣的问题	封面			
	确定变量和参数	1(a)		1	1
转化	确定支配原则	1(a)	2, 4, 6	2	1
	作出简化假设		9	7	6
	构建数学模型	1(a)	2, 4, 7	4	3
分析	选择合适的数学工具 & 解决 数学问题	1(a)	3, 5, 7, 8	3-5	2-4
	确定或估计参数		3, 7	4	3
	验证解决方案			6	5
解释	视像化解决方案	1(b)	3, 7	4	3
	得出适当的结论 & 传达结果	1(a)	5, 8	5, 6	4

活动 1A (请参阅工作纸 1)

此活动的目的是回顾学生的先备知识，包括使用代入法来找出公式中未知数的值（问题 1(a)）和二元一次方程及其图像的概念（问题 1(b)）。

教学建议：

1. 教师可透过讨论在现实情境中使用的公式来引起学生的兴趣。问题 1(a) 涉及二元一次方程，这个方程可用作计算印刷小册子的成本。在问题 1(b) 中，学生需绘画两个二元一次方程的图像。请注意，这直线的斜率是正数。因此，教师可与学生讨论以下的观察。

- x 的值越大， y 的值就越大。这将有助讨论活动 2 中，物业的楼面面积与标价之间的关系。

建议答案：

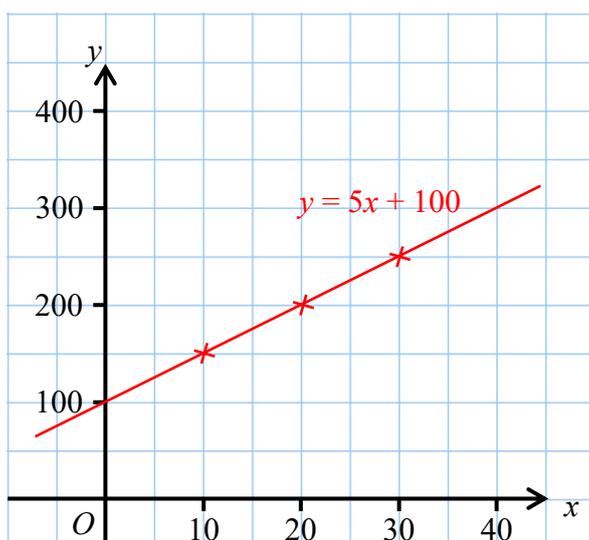
(a) 把 $x = 50$ 代入方程。

$$\begin{aligned}y &= 5(50) + 100 \\ &= 350\end{aligned}$$

∴ 印刷 50 本小册子的成本是 \$350。

(b) $y = 5x + 100$

x	10	20	30
y	150	200	250



活动 1B (请参阅工作纸 1)

此活动的目的是回顾学生使用电子表格的技巧，并介绍使用 MS Excel 制定模型的信息技术技能。

教学建议：

2. 根据问题 1(a) 的情境，教师可向学生介绍模型的概念。具体来说， $y = 5x + 100$ 可被视为描述印刷小册子数量与所需成本之间关系的模型。
3. 教师应强调，我们可以这样计算是因为我们已经有了这个方程（即模型）。在现实情况下，我们一开始可能没有这个模型，或者必须根据观察来制定模型。因此，教师可向学生介绍使用 MS Excel 制定模型的信息科技技能。教师可运用工作纸 1 中的逐步指示，引导学生制定描述印刷小册子数量与所需时间之间关系的模型。
4. 基于已知的数据， $y = 1.5x + 5$ 是描述印刷小册子数量与所需时间之间关系的模型。
5. 问题 5 让学生应用他们所制定的模型来估算印刷特定数量小册子所需的时间。透过这个应用，教师可强调数学建模的实用性。

建议答案：

把 $x = 80$ 代入 $y = 1.5x + 5$ 。

$$\begin{aligned}y &= 1.5(80) + 5 \\ &= 125\end{aligned}$$

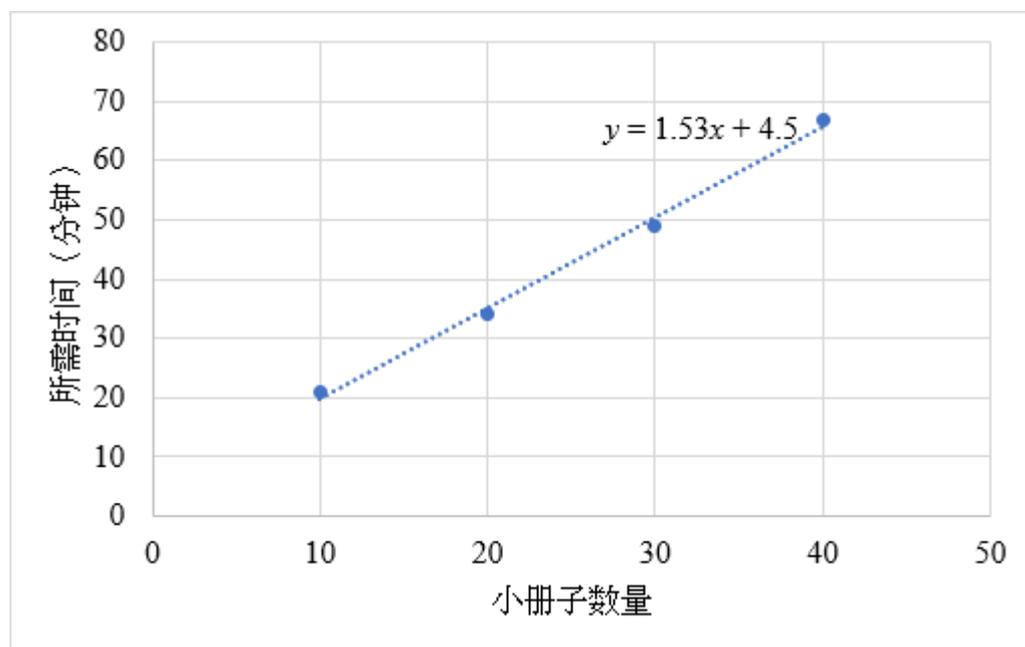
∴ 印刷 80 本小册子所需的时间估计为 125 分钟。

6. 请注意，我们所提供的数据点位于一条直线之上。教师应强调，在现实中，我们不一定能够找到一条通过所有数据点的直线。然而，尽管与一条直线有一些偏差，我们仍然可以观察到一个整体的趋势。例如，我们印刷的小册子数量越多，所需的时间就越多。对于能力较高的学生，教师可考虑讨论在 2013 年香港中学文凭考试数学（必修部分）试卷二第 28 题和 2008 年香港中学会考数学试卷二第 36 题的图像。

因此，教师可向学生介绍最佳拟合线的概念，即一条使线与数据点之间的距离最小化的线。如果学生对数学和统计学有浓厚的兴趣，教师可提及“回归线”这个术语。但对于初中的学生，我们建议教师多加聚焦于信息科技在建模过程中的运用，以及模型成果的应用。

7. 问题 7 要求学生应用他们在问题 3 中学到的技能，绘制一个基于已知数据的图像并制定模型。这可成为教师的进展性评估，以检视学生是否掌握在活动 2 和活动 3 所需的资讯科技技能。

建议答案：



∴ 该模型是 $y=1.53x+4.5$ 。

8. 与问题 5 相似，问题 8 让学生应用他们制定的模型来估算印刷特定数量小册子的所需时间。尽管我们不能找到一条通过所有数据点的直线，但最佳拟合线能帮助我们进行估算。透过这个应用，教师可再次强调数学建模的实用性。

建议答案：

把 $x=80$ 代入 $y=1.53x+4.5$ 。

$$\begin{aligned}y &= 1.53(80) + 4.5 \\ &= 126.9\end{aligned}$$

∴ 印刷 80 本小册子所需的时间估计为 127 分钟。

9. 在活动 1 的尾声，教师可进行关于制定模型的假设和局限性的讨论。这可提升学生在建模过程中作出假设和识别局限性的能力。以下是一些可能的讨论结果。

- 假设：
 1. 线性关系：模型假设印刷小册子数量与所需时间之间存在线性关系。但在现实中，这并非必然成立。特别是在印刷非常大量的小册子的情况下，机器限制或操作者疲劳可能会令印刷速度减慢。
 2. 没有其他因素影响：模型假设影响印刷小册子所需时间只有小册子数量这一个因素，没有其他因素的影响。但在实际情况下，机器效率、操作者经验和工作量变化等因子均可能影响所需时间。
- 局限性：
 1. 过度简化：这个模型只考虑一个因素（即小册子数量）而过度简化了印刷过程。印刷过程可能受到许多其他变量的影响，包括纸张质量和小册子的厚度，而这个模型并未考虑。
 2. 依赖少量数据：该模型只是基于 4 组数据来制定。印刷过程、技术和其他相关因素的任何变化都可能使模型不够准确或过时。我们需要更长时间的观察来搜集更多数据，再制定更完善的模型。

活动 2 (请参阅工作纸 2)

此活动的目的是通过使用真实数据制定实证性的模型，以丰富学生的建模经验。学生将使用物业的标价和相应的楼面面积来制定模型。工作纸 2 举例说明了如何使用数据和引导学生进行建模的教学设计。为提高与他们日常生活的关联，教师可要求学生在课堂前收集学校附近物业的标价数据。建模活动便可基于他们收集到的数据进行。

教学建议：

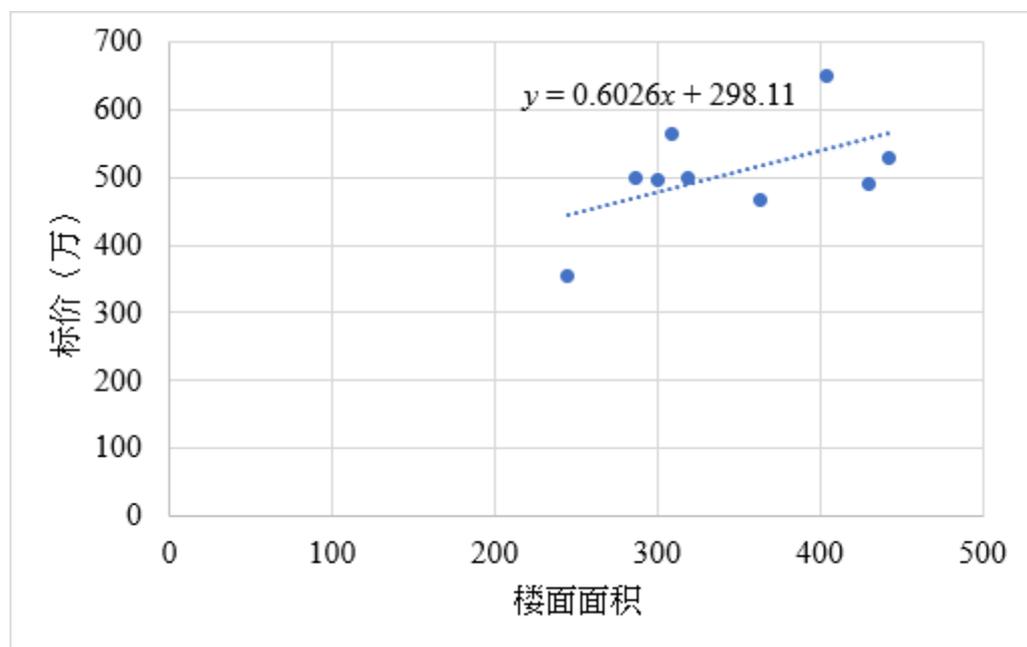
1. 教师可透过讨论设定物业标价时所需的信息来引起学生的兴趣。这可提升学生在建模过程中识别所需变量的能力。以下是一些可能的讨论结果。
 - 大小和格局：楼面面积、房间数目、浴室数目和厨房数目。
 - 楼宇状况：新建、已翻新或需要翻新。
 - 物业类型：私人屋苑、公共房屋或村屋。
 - 设施：游泳池、健身室和停车场。
 - 位置：靠近交通、学校和购物中心的程度。
2. 教师展示一些物业的标价数据和相应的楼面面积。虽然在问题 2 图表中的广告在香港十分常见，但教师应确认学生对当中数值的理解。例如，有些学生可能不知道如何将“498 萬”转换成 4,980,000。

教师可讨论楼面面积和物业标价之间的一般关系。具体来说，楼面面积越大，物业的标价就越高。

3. 教师可接续要求学生把数据输入到 MS Excel。为避免混乱，教师可建议学生把楼面面积和标价分别输入到栏 A 和栏 B。

4. 学生运用在活动 1B 中学到的技能绘制图表并制定模型（模型 A），以描述楼面面积（ x ）与物业标价（ y ）之间的关系。教师可以指出，所得到的图表与问题 2 所讨论的一般关系吻合。

建议答案：



\therefore 该模型是 $y = 0.6026x + 298.11$ 。

5. 问题 5 让学生应用他们制定的模型来建议一个物业的标价。透过这个应用，教师可强调数学建模在房地产定价中的实用性。

建议答案：

把 $x = 420$ 代入 $y = 0.6026x + 298.11$ 。

$$\begin{aligned} y &= 0.6026(420) + 298.11 \\ &= 551.202 \end{aligned}$$

\therefore 该物业的标价可定为 \$5,510,000。

6. 提示学生通过与实际标价进行比较来评估建模结果。这是一个重要的步骤，不仅有助于评估模型，还能帮助学生把数学世界和现实世界结合到一起。

建议的标价与实际标价之间的任何差异均可揭示优化模型的需要。例如，如果模型持续高估或低估标价，则必须对模型进行调整以提高其准确性。

建议答案：

绝对误差

$$= \$ (580 - 551) \times 10,000$$

$$= \$290,000$$

百分误差

$$= \frac{290,000}{5,800,000} \times 100\%$$

$$= 5\%$$

我们建议的标价比实际标价低约 5%。业主可能认为有其他因素，例如景观和物业的装修，使其价值提高。

7. 在活动 2 的尾声，教师可进行关于制定模型的假设和局限性的讨论。这可提升学生在建模过程中作出假设和识别局限性的能力。以下是一些可能的讨论结果。

• 假设：

1. 线性关系：模型假设楼面面积与物业标价之间存在线性关系。但在现实中，这并非必然成立，特别是在房地产市场中，呎价可能随着物业的楼面面积以几何级数上升。
2. 没有其他因素影响：模型假设标价仅受楼面面积的影响。然而，如问题 1 所讨论，实际情况可能不是这样，其他因素也会影响定价。

• 局限性：

1. 过度简化：该模型过度简化了楼面面积与物业标价之间的关系。在现实中，物业价格受到许多因素的影响，不仅是楼面面积，还包括地理位置、物业状况、市场需求、设施和经济状况等。
2. 依赖少量数据：该模型仅是基于 9 个物业的标价来制定，这可能无法准确代表整个市场的各种物业，故需要收集更多的数据，来建立更完善的模型。

活动 3 (请参阅工作纸 3)

继活动 2 之后，此活动的目的是通过使用真实数据制定实证性的模型，进一步丰富学生的建模经验。学生将使用物业的标价和相应的楼龄来制定模型。工作纸 3 举例说明了如何使用数据和引导学生进行建模的教学设计。如果学生要进行数据收集，他们需要调查所收集数据中建筑物的竣工年份。教师可建议学生在网上寻找相关的资料，同时强调批判性思维以判断信息来源的可信性。

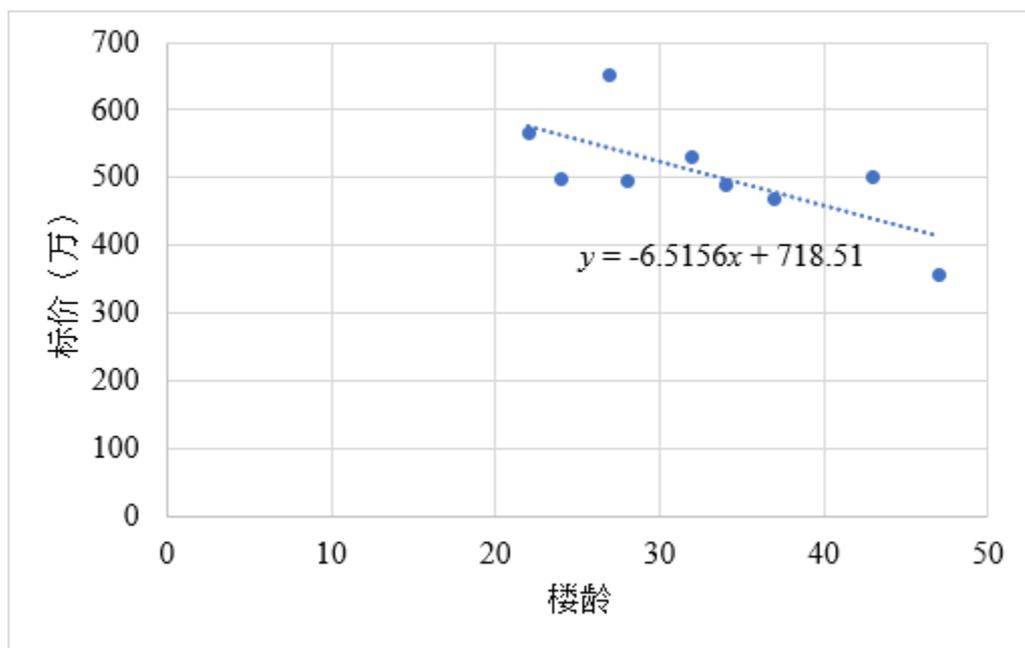
教学建议：

1. 教师可透过讨论另一个可能影响房地产定价的因素，即建筑物的年龄，来引起学生的兴趣。教师展示一些物业标价的数据和相应建筑物的竣工年份。

教师可讨论楼龄与物业标价之间的一般关系。具体来说，楼龄越高，物业的标价就越低。这应用了“百分法”学习单位中的折旧概念。

2. 有了活动 2 的经验，学生应该能够把数据输入到 MS Excel 中。然而，教师应检视他们是否能够从建筑物的竣工年份计算物业的楼龄。为避免混乱，教师可建议学生分别把物业的楼龄和标价输入到栏 A 和栏 B。
3. 学生运用在活动 1B 中学到的技能绘制图表并制定模型（模型 B），以描述楼龄 (x) 与物业标价 (y) 之间的关系。教师可以指出，所得到的图表与问题 1 所讨论的一般关系吻合。

建议答案：



∴ 该模型是 $y = -6.5156x + 718.51$ 。

4. 问题 4 让学生可应用他们所制定的模型来建议一个物业的标价。

建议答案：

楼龄

$$= 2023 - 1985$$

$$= 38$$

把 $x = 38$ 代入 $y = -6.5156x + 718.51$ 。

$$y = -6.5156(38) + 718.51$$

$$= 470.9172$$

∴ 该物业的标价可定为 \$4,710,000。

5. 根据模型 A 和模型 B 的建议标价，学生有机会比较不同模型。对于模型 A，标价相差 \$290,000。但对于模型 B，标价相差 \$1,090,000。在这种情况下，模型 A 的建议标价比模型 B 的建议标价更接近实际的标价。以下是可能的含义。

- 与楼面面积相比，楼龄可能对物业的标价影响较小。

6. 与活动 2 相似，教师可进行关于制定模型的假设和局限性的讨论。有了活动 2 的经验，学生应该能够更好地识别建模过程中的假设和局限性。以下是一些可能的讨论结果，这与活动 2 的问题 7 相似。
- 假设：
 1. 线性关系：模型假设楼龄与物业标价之间存在线性关系。
 2. 没有其他因素影响：模型假设标价仅受建筑物年龄的影响。但至少有一个重要因素，即楼面面积，未被考虑进去。
 - 局限性：
 1. 过度简化：该模型过度简化了楼龄与物业标价之间的关系。
 2. 依赖少量数据：该模型仅是基于 9 个物业的标价制定，可能无法准确代表整个市场的各种物业。

总结：

在活动 2 和活动 3 中，学生根据一些真实数据运用 MS Excel 来制定最佳拟合线，这些直线有助表达在图表中不同数据点的关系。然而，活动 2 和活动 3 均只考虑了一个因素（楼面面积;楼龄）来制定模型。

要建立涉及两个或多个因素的模型，教师可考虑向学生介绍使用免费的线上统计应用程序，例如：

https://stats.blue/Stats_Suite/multiple_linear_regression_calculator.html

<https://www.socscistatistics.com/tests/multipleregression/default.aspx>

作为增进活动，学生可使用上述活动中的数据制定模型。

Variable Names (optional):	Resp. Var. y	Expl. Var. x_1	Expl. Var. x_2
	Price	Area	Age
Sample data goes here (enter numbers in columns):	468	363	37
	530	443	32
	490	430	34
	650	404	27
	565	309	22
	498	287	24
	500	319	43
	495	300	28
	355	245	47

但值得注意的是，上述活动的数据很少。另外，影响房地产标价的因素有很多。因此，我们必须收集更多的数据，并考虑更多的因素来持续完善我们的模型。

参考文献：

Yong, D., Levy, R., & Lape, N. (2015). Why no difference? A controlled flipped classroom study for an introductory differential equations course. *PRIMUS*, 25(9–10), 907–921.

建议的教案和教学流程

教学时间：70 分钟或双课节

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
10	<ul style="list-style-type: none"> • 引起学生兴趣 • 回顾先备知识 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教师透过讨论现实情境来引起学生的兴趣。 2. 教师利用例子作为热身练习，让学生回顾运用代入法求公式中未知数的值。 3. 教师利用示例作为热身练习，回顾学生二元一次方程及其图像的概念。 	<p>WS 封面</p> <p>WS1A Q1</p>
25	<ul style="list-style-type: none"> • 介绍模型的概念 • 回顾使用試算表的 IT 技巧 • 介绍使用 MS Excel 制定模型的 IT 技巧 • 应用建模结果 • 介绍最佳拟合线的概念 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教师向学生介绍模型的概念。例如，方程 $y = 5x + 100$ 可被视为描述印刷小册子数量与所需成本之间关系的模型。 2. 教师要求学生把数据输入到 MS Excel，以回顾他们使用試算表的技巧。 3. 教师向学生介绍使用 MS Excel 制定模型的 IT 技巧。 4. 教师要求学生应用他们的建模结果作出估算。 5. 教师强调在现实中，我们不一定能够找到一条通过所有数据点的直线，但我们仍然可观察到整体趋势。以下两题试题可以作为示例。 <ul style="list-style-type: none"> ➤ 2013 年香港中学文凭数学科卷 2 Q28 ➤ 2008 年香港中學會考数学科卷 2 Q36 6. 因此，教师引入最佳拟合线的概念。 	<p>WS1B Q2</p> <p>WS1B Q3–4</p> <p>WS1B Q5</p> <p>WS1B Q6</p>

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
	<ul style="list-style-type: none"> • 加强使用 MS Excel 制定模型的 IT 技巧 • 应用建模结果 • 提升在建模过程中作出假设和识别局限性的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 7. 教师要求学生应用他们之前学到的技巧来绘制图像，并根据已知的数据制定模型。 8. 教师评估学生对 IT 技巧的掌握程度。 9. 教师要求学生应用他们的建模结果作出估算。 10. 学生分组讨论所制定模型的假设和局限性。教师可运用以下问题来激发思考：关系总是线性的吗？还有其他我们没有考虑的因素吗？数据是否足以制定模型？ 	<p>WS1B Q7</p> <p>WS1B Q8</p> <p>WS1B Q9</p>
20	<ul style="list-style-type: none"> • 提升识别变量的能力 • 使用真实数据制定实证性的模型 • 应用建模结果 • 评估模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 学生分组讨论为物业设定标价时所需的信息。教师可要求学生考虑以下几方面以促进讨论：大小和布局、楼宇状况、物业类型、设施和位置。 2. 透过展示一些真实数据，教师讨论建筑面积与物业标价之间的一般关系。 3. 教师要求学生把数据输入到 MS Excel 并制定模型（模型 A）。 4. 教师要求学生应用他们的建模结果来提供建议。 5. 教师要求学生通过与真实数据进行比较来评估建模结果。 6. 学生分组讨论真实数据和基于模型的建议，两者之间存在差异的可能原因。教师可运用以下问题来激发思考：为什么业主认为物业值得更高的价格？ 	<p>WS2 Q1</p> <p>WS2 Q2-4</p> <p>WS2 Q5</p> <p>WS2 Q6</p>

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
	<ul style="list-style-type: none"> 提升在建模过程中作出假设和识别局限性的能力 	7. 学生分组讨论所制定模型的假设和局限性。教师可运用以下问题来激发思考：关系总是线性的吗？还有其他我们没有考虑的因素吗？数据是否足以制定模型？	WS2 Q7
10	<ul style="list-style-type: none"> 使用真实数据制定实证性的模型 应用建模结果 评估模型 提升在建模过程中作出假设和识别局限性的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 透过展示一些真实数据，教师讨论楼龄与物业标价之间的一般关系。 教师要求学生把数据输入到 MS Excel 并制定模型（模型 B）。 教师要求学生应用他们的建模结果来提供建议。 教师要求学生通过与真实数据进行比较来评估建模结果。 然后，教师要求学生比较不同的模型。学生分组讨论他们观察的含义。教师可运用以下问题来激发思考：哪个模型能提出更接近真实数据的标价，什么因素对标价影响更大。 学生分组讨论所制定模型的假设和局限性。教师可运用以下问题来激发思考：关系总是线性的吗？还有其他我们没有考虑的因素吗？数据是否足以制定模型？ 	WS3 Q1–3 WS3 Q4 WS3 Q5 WS3 Q6

时间 (分钟)	教学目的	教学活动和流程	资源/ 备注
5	<ul style="list-style-type: none"> 总结活动 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教师回顾模型的概念以及 MS Excel 在制定模型时的应用。 2. 教师强调数学建模在物业定价和其他领域的实用性。 3. 教师指出在制定模型时需要作出假设，因此存在局限性。 4. 教师建议学生进一步探究使用免费的线上统计应用程序，以制定涉及两个或多个因素的模型。 	